

Freudenthal, Hans

Kinder und Mathematik

Floer, Jürgen [Hrsg.]; Haarmann, Dieter [Hrsg.]: *Mathematik für Kinder: Grundlegung - Beispiele - Materialien*. Frankfurt am Main : Arbeitskreis Grundschule e.V. 1982, S. 7-34. - (Beiträge zur Reform der Grundschule; 50)



Quellenangabe/ Reference:

Freudenthal, Hans: Kinder und Mathematik - In: Floer, Jürgen [Hrsg.]; Haarmann, Dieter [Hrsg.]: *Mathematik für Kinder: Grundlegung - Beispiele - Materialien*. Frankfurt am Main : Arbeitskreis Grundschule e.V. 1982, S. 7-34 - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-175298 - DOI: 10.25656/01:17529

<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-175298>

<https://doi.org/10.25656/01:17529>

in Kooperation mit / in cooperation with:



www.grundschulverband.de

Nutzungsbedingungen

Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document.

This document is solely intended for your personal, non-commercial use. Use of this document does not include any transfer of property rights and it is conditional to the following limitations: All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.

Kontakt / Contact:

peDOCS
DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation
Informationszentrum (IZ) Bildung
E-Mail: pedocs@dipf.de
Internet: www.pedocs.de

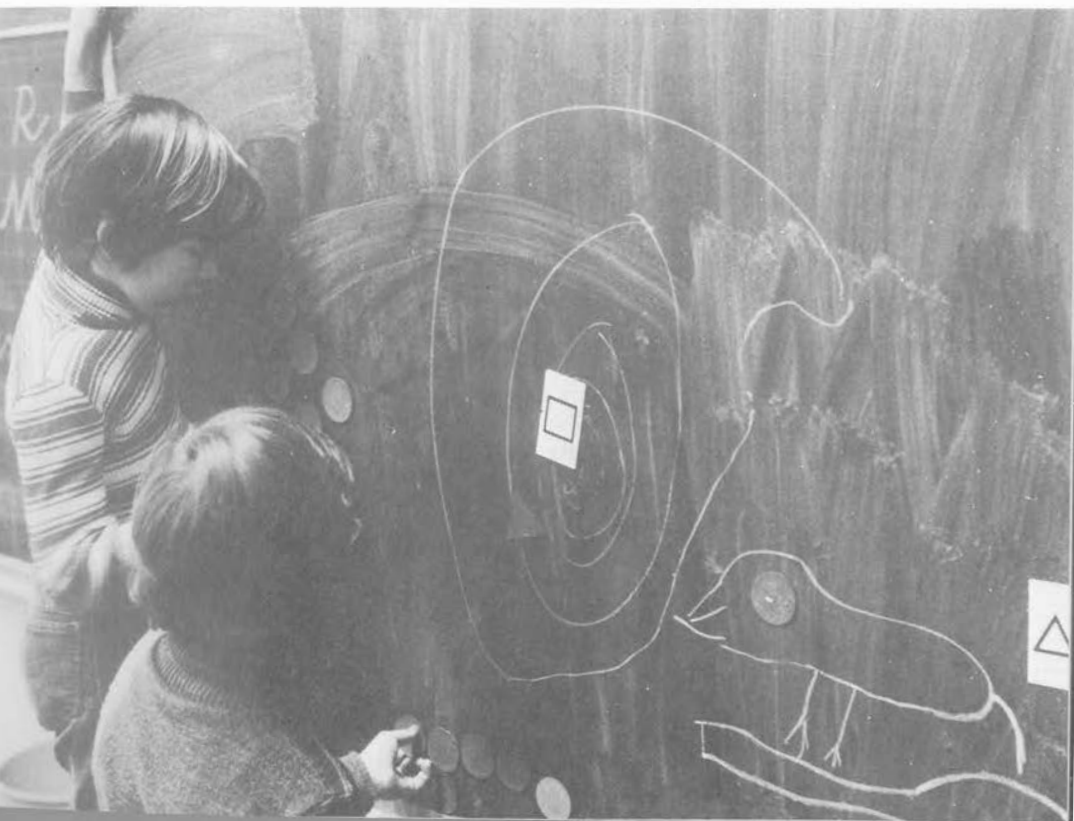
Digitalisiert

Mitglied der


Leibniz-Gemeinschaft

Hans Freudenthal

Kinder und Mathematik



Was ist Mathematik?

Kinder und Mathematik – was ist das eigentlich für ein „und“? Wie in „Adam und Eva“, wie in „Max und Moritz“? Oder wie in „Leben und Tod“, „Schuld und Sühne“? Sagen wir einmal, es ist das von „und so weiter“.

Die Mathematik ist älter als die Schrift – historisch ist das heute wohl sicher. Nicht älter als die Sprache, aber vermutlich auch nicht viel jünger. Mit dem Kind ist es wie mit der Menschheit bestellt. Wann fängt die Mathematik an? Wenn ein Kind ein Dreieck von einem Quadrat, zwei von drei, drei von vier unterscheiden kann? Oder: wenn, während die Mutter geradeaus geht, das Kind um eine Busch-anlage herumläuft, um am Ende die Mutter zu überraschen? Es hängt davon ab, wie bewußt es geschieht.

Er war gerade drei Jahre alt. Ich spazierte mit ihm „zwischen den Schienen“ eines Industriegleises. Ich sah ihm an, daß er etwas entdeckt hatte. „Schau, Opa, wie ich es mache: einen Schuh drauf und einen Schuh drin!“ In der Tat, so lief er, abwechselnd auf und zwischen den Schwellen. Ich erzählte es zu Hause. „Und bist du ihm nachgefolgt?“, fragte meine Frau. Ich schämte mich, daß mir das nicht eingefallen war – er tat mir doch etwas vor. Unnötigerweise, wie ich einige Monate später merkte – wieder zwischen den Schienen – als er mir zeigte: „Und nun mache ich es wie die Großen“ – von Schwelle zu Schwelle.

So hatte ich es – unbewußt – vermutlich auch getan, von Schwelle zu Schwelle. Er konnte es noch nicht isomorph abbilden, und so tat er es homomorph, bis ihm Monate später auch jenes gelang. Nicht, daß er es tat, sondern, daß er wußte, was er tat, war Mathematik. Es wird nämlich nicht erst dann Mathematik, wenn man die Worte Abbildung, isomorph und homomorph kennt, geschweige denn die Begriffsdefinition.

Erfahrungen bewußt machen

Rhythmus und Wiederholungsstruktur ist die erste Mathematik, die sich bewußt erleben läßt, beim Springen und Seilspringen, beim Abzählen und Zählen zum Versteckspiel. Wiederholung ist das primitivste Mittel, Unbegrenztes zu erfahren, zu erzeugen. So geht es, wenn das Kind erst einige Zahlwörter beherrscht: 1, 2, 3, 8, 2, 3, 8, 2, 3, 8 ... Und dann mit einem Male hat es den Trick heraus, wie man immer *neue* Zahlwörter bildet. Noch nicht ganz fehlerfrei: nach hundert kommt einundhundert usw. Aber das liegt eher an Unvollkommenheiten unserer Sprache.

Eine Fünfjährige, die das Zählen bis 100 (vielleicht noch weiter) gut beherrscht, schreibt ... 18, 19, 110, 111 ..., und obwohl sie auf den Fehler aufmerksam gemacht wird, wiederum 28, 29, 210, 211, ... Aussprechen und Schreiben der Zahlen sind noch getrennte Systeme. Aber bald hat sie es heraus: diesen Trick, unbeschränkt neue Zahlen in Wort und Schrift zu bilden. Nirgendwo in der Mut-

tersprache sind Kinder so früh so weit in der Beherrschung eines unbeschränkten Wortschatzes und eines, je weiter man kommt, desto regelmäßigeren sprachlichen Algorithmus. Ist das Mathematik?

Es hängt davon ab, wie bewußt es erlebt wird. Und die Aufgabe des Unterrichts ist es, dieses bewußte Erleben anzuregen, zu fördern, es so weit zu bringen, daß das Kind bewußtes Erleben anstrebt.

Abstrahieren oder Konkretisieren?

Eine Geschichte aus der Vorschule: Die Kinder haben Fische im Aquarium. Der Glasbehälter muß ab und zu gereinigt werden. Sie schauen zu, wie die Hortnerin es macht. Sie fängt die Fische in einem Schöpfnetz und setzt sie in ein anderes Gefäß. „Nun können wir sie mal zählen“, sagt Annette. Sie hat es schon eher versucht, aber es gelang nicht. „Fräulein, sie schwimmen so durcheinander“, sagte sie. Einer nach dem anderen werden die Fische aus dem Aquarium geschöpft. Drei hat Annette schon gezählt, aber nun schöpft die Hortnerin drei zugleich. „Fräulein, nun kann ich nicht mehr zählen.“ Sie antwortet: „Vielleicht kannst du die Fische zeichnen und, wenn du sie gezeichnet hast, auf dem Papier zählen.“ „Ja, das ist ein guter Gedanke.“ Annette holt Papier und Stift. „Warten Sie mal!“ Sie zeichnet die ersten drei und die zweiten drei, und dann kann sie leicht Schritt halten. Kein Fisch wird überschlagen. Wenn der Behälter leer ist, zählt sie die Fische. Stolz ruft sie aus: „Nun weiß ich es. Es sind fünfzehn.“ Ein paar Tage später sind zwei tot. „Schade, nun stimmt es nicht mehr.“ Sie weiß nicht mehr, wie viele nun im Aquarium sind. „Nimm doch mal deine Zeichnung“, rät die Hortnerin ihr. Sie streicht die toten aus und nun weiß sie es wieder.

Ist das Mathematik? Ich habe es vielmehr als Beispiel erzählt, wie man Kinder zur Mathematik führt. Mathematik ist Abstraktion – sagt man. Ja, die Mathematik, die im Buche steht. Aber Mathematik treiben ist ebenso oft konkretisieren, und Mathematik lernen ist es überwiegend. 1936 auf dem Schiff zum Osloer Kongreß stellte ich *Polya* eine wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgabe. Er zeichnete etwas auf einen Zeitungsrand, dachte nach und gab die Antwort. Es hat auf mich Eindruck gemacht, wie der große Mathematiker es nicht verschmähte, eine abstrakte Aufgabe bildlich zu konkretisieren.

Rechnen im konkreten Kontext

Kürzlich war ich in einer Sonderklasse – Kinder verschiedenen Alters, die wohl schriftliches Rechnen beherrschten, manche leider dabei nicht das Einmaleins. An der Tafel stand eine Aufgabe: „Eine Treppe ist weniger als 20 und mehr als 15 Stufen hoch, und man kann mit zwei Stufen zugleich hinunterkommen, aber auch mit drei Stufen zugleich. Wie viele Stufen hat die Treppe?“ Da das „weniger“ bei 20 und das „mehr“ bei 15 stand, schrieben alle Schüler erst 15 – 20 auf, und

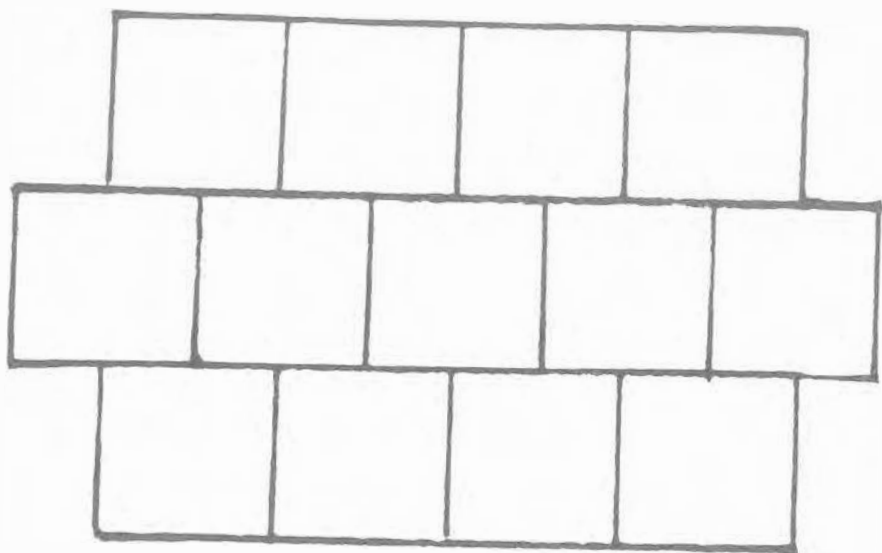


Abb. 1

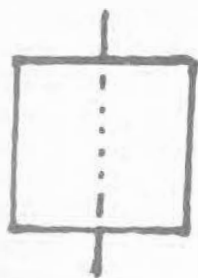


Abb. 2

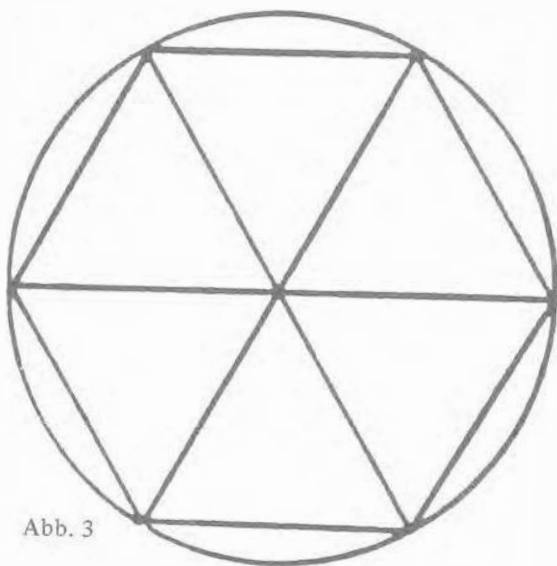


Abb. 3

da das nicht ging, änderten die meisten es in $20 - 15$ und einige in $20 + 15$. Ich sagte einem Mädchen: „Zeichne mal eine Treppe.“ Sie tat es, ganz schematisch, numerierte die Stufen, und im Nu hatte sie die Lösung. Als ich den Rücken gewandt hatte und der Lehrer kam, sah sie ihn und sagte: „Und nun rechne ich es noch aus“ und schrieb $20 - 15 = 5$.

Eine andere Aufgabe an der Tafel war eine komplizierte Abzahlungsgeschichte: ein Fernsehgerät, eine Anzahlung und 12 Raten, und wieviel es bei Barzahlung kostet, und was man dann spart. Was muß man da nicht alles addieren, subtrahieren, multiplizieren! Mit einem Mädchen (13 Jahre) stieg ich hinunter bis zur Frage „wenn du mit einem Zwanzigmarkschein bezahlst und fünf Mark herausbekommst, wieviel hast du dann wirklich bezahlt?“.

Eine dumme Frage, die sie nicht beantworten konnte. Wie sollte sie es auch? Ich hätte es mit Geld aus meiner Tasche vormachen sollen. Es gab in dieser Klasse kein Material. Nur Aufgaben an der Wandtafel. Die Kinder hatten Mathematik vermutlich niemals in einem ihnen angemessenen konkreten Kontext erlebt.

Große Mengen zählen – ein Kontext, in dem Kinder unermesslich viel lernen können. Zwei Klassen des zweiten Schuljahrs: die eine hat Mathematik schon ein Jahr lang im Kontext betrieben, die andere nicht. Man gibt ihnen in Gruppen von vier je einen Beutel mit hunderten Gegenständen – den einen Reißnägel, den anderen Münzen, diesen Perlen, jenen Papierklammern usw. In der einen Klasse hat jede Gruppe blitzschnell ein System erdacht, mit dem geringsten Zeit- und Arbeitsaufwand ihre Menge zu zählen. In der anderen fängt man es so dumm wie nur möglich an. Sieh mal, da holt einer aus der Gruppe die Perlen eine nach der anderen aus dem Beutel, während ein zweiter zählt und die anderen zugucken. Auch Arbeitsteilung muß gelernt werden. Es gibt Dreizehnjährige, die davon keine Ahnung haben. Wo lernt man so etwas? Im Kontext.

Der Wert der Geometrie

Darum ist die Geometrie so schön. Die ist ja, im Gegensatz zum Rechnen, von selber konkret und das bleibt sie, wenn man sie recht versteht. Aber ist sie darum schon Mathematik?

Ich gehe mit einem Sechsjährigen spazieren. „Wo ist die Mitte der Niederlande?“, fragt er. (Man nennt Utrecht die Mitte, aber das stimmt nicht.) Ich stelle eine Gegenfrage: „Wo ist deine Mitte?“. Er zeigt auf seinen Scheitel. Auf so etwas reagiere ich immer falsch. Ich hätte vorsichtig forschen sollen, was er damit meinte. Vielleicht Mitte im Sinne von Achse, und das wäre recht vernünftig gewesen. „Nein“, sagte ich, „irgendwo in deinem Bauch.“ Da schaute ich auf das Pflaster, ein Fliesenpflaster. (Abb. 1) „Wo ist die Mitte dieser Fliese?“ Sie habe keine Mitte, meinte er erst, und dann zeigte er sie ungefähr. „Geht es nicht genauer?“ Er zog mit dem Finger die Strecke durch, die in Abb. 2 gestrichelt ist, und zeigte auf ihren Mittelpunkt. „Geht es mit schrägen Linien nicht noch genauer?“ Sofort zog er mit dem Finger die Diagonalen und zeigte auf ihren Schnittpunkt. Ich hätte

ihn noch fragen können: „Woher weißt du das?“, aber er hätte das kaum anders beantworten können als mit einem „Ich sehe es“. Wüßten Sie einen besseren Beweis? Das Quadrat ist ja so eine regelmäßige Figur, und es bleibt das, wenn man die Diagonalen einzeichnet, also muß ihr Schnittpunkt auch regelmäßig liegen.

Ich erklärte ihm, diese schrägen Linien hießen Diagonalen, und bei einer Bank mit einer rechteckigen Sitzfläche (nein, es waren drei Rechtecke Holz mit zwei Rechtecken Luft dazwischen, und doch war es *ein* Rechteck) sollte er mir die Diagonalen zeigen. Er zog aus einer Ecke eine Gerade im Winkel von 45° zu den Seiten. Ich machte ein böses Gesicht, und gleich verband er zwei Ecken mit dem Finger.

Der Knabe ist nun zehn Jahre alt. Das Wort Diagonale gehört immer noch nicht zu seinem aktiven Wortschatz, und doch weiß er genau, was Diagonalen sind, auch räumliche.

Die erste Mathematikstunde, von der die Geschichte weiß, ist die Geometriestunde, die *Sokrates* in dem berühmten Platonischen Dialog dem Sklaven des *Menon* erteilte: ein Quadrat verdoppeln. In meinen Aufsätzen und Büchern finden Sie immer wieder eine andere Geschichte, wie ich dem Sokrates nachgeeifert habe. Immer anders und immer besser. Ist es nun endgültig? Ich lasse das Quadrat nicht verdoppeln, sondern halbieren, denn das kann im *gegebenen* Material geschehen, und dann hinterdrein ist das Verdoppeln eine Kleinigkeit. Mit 7- bis 8jährigen gelingt es schon. Ein Taschentuch, eine Serviette von Stoff oder Papier. Halbiere das, aber es soll wieder ein Quadrat sein! Nach den üblichen Fehlern faltet man Parallelstreifen zum Rande um, aber ist selber kaum überzeugt. Und da greift einer das Taschentuch am Zipfel, faltet ihn zögernd und dann zielbewußt zur Mitte hin, und die anderen greifen schnell die anderen Zipfel und machen es ebenso.

Warum ist das die Hälfte? Die Frage zu stellen ist schon Mathematik (dessen, der sie stellt), und jede Antwort, die zeigt, daß der Lernende Zusammenhänge sucht, ist Mathematik.

Ein Kreis – ein jeder weiß, was das ist. Ein Kreis hat einen Mittelpunkt. Aber wie findet man ihn? Laß ihn ausschneiden, und jeder findet ihn durch Falten. Aber warum ist das der Mittelpunkt? Lausche den Antworten! Es ist Mathematik.

Wenn man sechsmal mit dem Halbmesser den Kreisumfang abschreitet, endet man, wo man anfing. Warum? (Abb. 3) Laß alle diese gleichseitigen Dreiecke zeichnen! Der Keim eines wohl vertrauten Fliesenpflasters beantwortet das „warum?“ Weil die Ebene sich mit kongruenten Dreiecken pflastern läßt. Und darum ist *das* so? Lassen wir es bei dieser Tatsache, die ja viel handgreiflicher ist als die Winkelsumme im Dreieck!

Ein Neunjähriger erzählt mir, er habe heute Nachmittag den Schatten gemessen. „Es war 3 zu 9.“ „Was war 3 und was 9?“ Er ist über die Frage ungehalten, denkt aber doch nach und erklärt, der Stock sei 3 und der Schatten 9 gewesen (vermutlich Dezimeter). Und wenn der Stock 6, 1, 2 gewesen wäre?

Es wird alles richtig beantwortet. Er hatte eigentlich auch den Winkel wissen wollen. Zeichnen und dann messen. Aber eigentlich ausrechnen. Ich habe keinen Winkelmesser und keinen Taschenrechner bei mir. Ich erzähle etwas von Tafeln.

Hinterdrein schämte ich mich. Ich hätte ihn das Dreieck zeichnen und ausschneiden lassen sollen. Und dann umlegen, bis ein rechter Winkel herauskam. Es geht recht genau fünfmal. Und dann um die Arbeit zu krönen, 90 durch 5 dividieren lassen. So läßt man sich die schönsten Gelegenheiten entgehen.

Kinder und Mathematik – ja erwachsende Mathematik und keine erwachsene.

Grundschulmathematik in den Niederlanden

Schon *Felix Klein* hatte konstatiert, wie weit die Schulmathematik hinter der mathematischen Forschung zurückgeblieben war. In den sechziger Jahren, nach dem Sputnikschock, wurde dieser Rückstand als Richtlinie zur Erneuerung des Mathematikunterrichts aufgegriffen. International wurde propagiert, was man auf Englisch *New Math* und in der Bundesrepublik – unzutreffend – *Mengenlehre* nannte. Ein angeblicher hundertjähriger Rückstand sollte in ein paar Jahren eingeholt werden, nicht nur vom Gymnasium, sondern auch von Grundschule und Kleinkinderschule.

Die Niederlande waren – meine ich – das einzige Land, das nicht mitmachte. Die ersten Fortbildungskurse zeigten, daß die Grundschullehrer nicht imstande waren, die sogen. Mengenlehre sinnvoll zu verarbeiten. Hinzu kam die Einsicht, daß der Mathematikunterricht nicht von oben her – Universität und Forschung – bestimmt sein soll, sondern von der Umwelt, wie sie jeweils vom Schüler erlebt wird, der Umwelt des Alltags, aber auch des Spiels und des Märchens. Mathematische Weltkunde – nennen wir es auch. Nicht Abstraktionen und Schemata hoher Stufe hinuntertransponieren und – widersinnig – konkretisieren, sondern das Kind selber den Weg zu Begriffen und Schemata finden lassen, ist der Sinn des *Wiskobas*-Lehrplans.¹⁾

Ich habe ausdrücklich zwei anspruchslose Beispiele ausgewählt. Das Thema 'Grüße des Riesen' (2.-3. Klasse) ist Glied einer jahrgangsübergreifenden Kette, „Verhältnisse“, die auch schon in der Kleinkinderschule anfängt und schließlich in der Bruchrechnung endet, die der heute in der BRD üblichen dadurch ganz und gar nicht ähnelt.

(aus: Grundschule 3/1981, S. 100 ff.)

Unterrichtsbeispiel: Die Größe des Riesen

Die Folge besteht aus 6 Stunden:

1. die Hand des Riesen,
2. der Fuß des Riesen,
3. merkwürdige Fußspuren,

1) „Wiskobas“ = Kleinkinderschule in den Niederlanden. Der Lehrplan, dem das folgende Unterrichtsbeispiel entnommen ist, wurde von dem IOWO, dem niederländischen Institut zur Entwicklung des Mathematikunterrichts, in der Schulpraxis erarbeitet.

4. die Zeitung des Riesen,
5. Fußstapfen im Schnee,
6. dem Riesen frieren die Hände.

Wir geben hier auszugsweise die Stunden wieder.¹⁾

Die Hand des Riesen

Ein Fenster der Klasse war offen. Auf der Tafel steht die Zeichnung einer großen Hand. Es muß ein Riese im Klassenzimmer gewesen sein.

Die Lehrerin erzählt die Geschichte vom Riesen Egbert. Er war fast der einzige Riese auf der Welt, er fühlt sich einsam. Mit niemand konnte er sprechen. Mit den Menschen? – dachte er. Sie würden sich ängstigen. Er war so häßlich – dachte er – mit den großen Füßen ... (Abb. 4)

Ist das nicht eine Riesenhand?“ „Ja“, sagt Johann, „ich habe noch niemals eine so große Hand gesehen.“ – „Ist er wohl größer als ich“, fragt die Lehrerin. „Ja sicher“. Aber warum? Sie wartet eine Weile, um nicht die Vorlauten ans Wort zu lassen. Peggy darf antworten: „Die Hand ist viel größer als Ihre und darum ist der Riese auch viel größer.“

Wie groß ist er? Viel Diskussion ... so groß wie die Klasse, wie ein Baum ... Die Lehrerin meint etwas anderes. Sie bringt die Schüler auf die Spur.

„Guckt mal nach meiner Hand und der des Riesen. Vergleicht das mal.“ Sie legt ihre Hand neben die des Riesen, so daß die unteren Ränder auf gleicher Höhe sind.

„Drei mal so große Hände wie Sie“ sagt Hajo. Sie messen, und es ist ungefähr viermal.

Noch ein Wink der Lehrerin: „Weißt du nun, wie groß der Riese ist? ... Könnte er zehnmal so groß wie ich sein?“

„Nein“, sagen einige. Und Marcel: „Er wird wohl viermal so groß wie die Lehrerin sein, denn seine Hand ist viermal so groß.“

„Könnte der Riese Egbert wohl längs in der Klasse liegen? Wie stellen wir das fest?“

Allerlei Vorschläge. Man beschließt, mit einer Schnur die Lehrerin zu messen. Dann wird eine viermal so lange Schnur abgeschnitten und auf den Fußboden gelegt. Sie paßt etwas schräg in das Klassenzimmer.

Schließlich schreiben die Kinder dem Riesen einen Brief: „Wir denken, du bist so lang wie diese Schnur.“

1) Verfasser: Hans ter Heege und Ed de Moor, erstmals veröffentlicht in „Grundschule“ 3/1981, S. 107 ff.



Abb. 4



Abb. 5

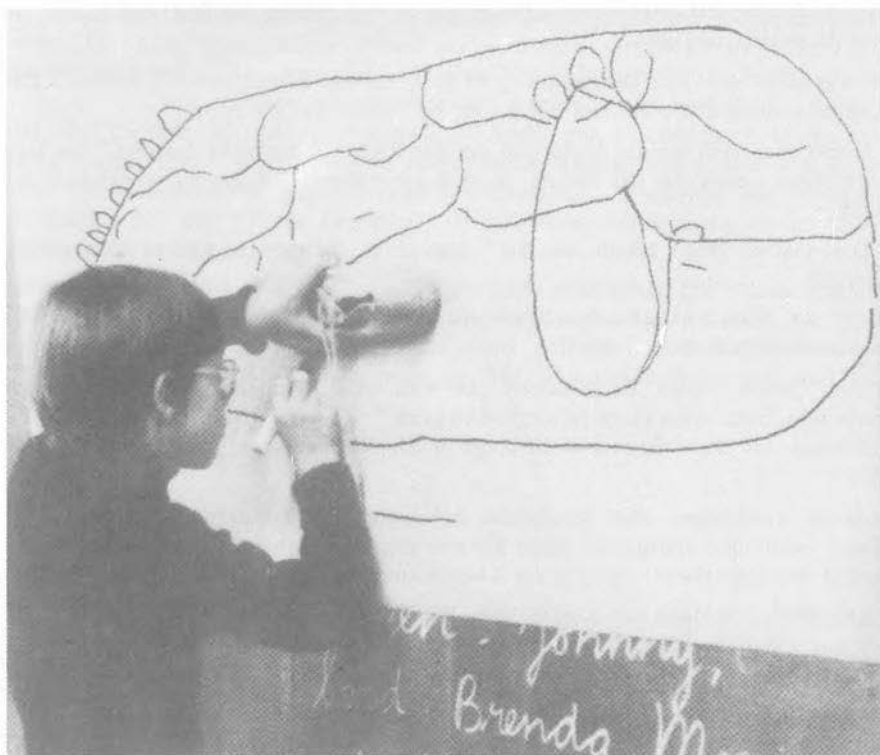


Abb. 6

Der Fuß des Riesen

Am nächsten Tage steht Egberts Antwort an der Tafel.

„Liebe Kinder!

Ja, ich bin ein Riese. Ich bin so groß wie eure Schnur. Findet ihr das nicht schlimm? Habt ihr Angst? Es fällt mir im Menschland nicht leicht.

Egbert.“

„Warum fällt es ihm nicht leicht?“ Die Schüler zählen allerlei auf. Die Lehrerin gibt Anregungen: „Wo kann der Riese wohl laufen und wo nicht? Wieviele Brötchen ißt er, wenn er Hunger hat?“

Friedrich meint, daß er mit seinen großen Füßen leicht Dinge zerstört. Die Lehrerin geht darauf ein: „Wie groß ist wohl Egberts Schuh?“

Sie gibt den Schülern ein Stück Papier (Tapete), auf dem sie Egberts Schuhabdruck zeichnen sollen. Wieder ein Wink: „Wären die Schuhe wohl so groß wie meine?“

So kommt Hajo auf den Gedanken, den Schuh der Lehrerin aufzunehmen. Sie muß sich mit einem Fuß auf das Tapetenpapier stellen. Mit Strichen deuten die Schüler viermal die Schuhlänge an. Ein Problem erhebt sich: Es sind fünf Striche, aber der Abstand zwischen erstem und fünftem ist viermal so groß wie der Schuhabdruck der Lehrerin.

Aber wie sieht der Schuh des Riesen aus? In Gruppen arbeiten sie weiter. Sie benutzen Schuhe und Turnschuhe der Lehrerin. Die meisten übernehmen nur die Länge und zeichnen dann aufs Augenmaß weiter.

„Wie breit ist der Riesenschuh denn?“ Mariechens Gruppe hat daran gedacht. „Viermal so breit wie der der Lehrerin.“

Die meisten Gruppen müssen ihre Zeichnungen dem anpassen. „Welcher Abdruck ist nun der beste?“ Es wird einer gewählt.

Eine neue Frage: „Wieviele von meinen Sohlen passen in Egberts Sohle?“ Die erste Reaktion ist: vier. Aber schon zögern sie. Sie glauben es selbst nicht. Man sieht ja, daß das nicht stimmt.

Marcel sagt „zwölf“ und erklärt es: vier so (in der Länge), vier so (in der Breite), das sind acht, und dann noch in den Ecken. Zwölf zusammen. Marcel zeigt an der Tafel, was er meint. Der Lehrerin gefällt es, weil Marcel implizit erklärt, daß es sich um Flächeninhalt handelt. Er spricht von Ecken und füllt sie mit je einem Abdruck, was zu wenig ist. So wird auch aus der Klasse reagiert. Zur Kontrolle fügt man den Schuh der Lehrerin in die Ecken, und es bleibt viel Platz.

Die Lehrerin sagt: „... vier Schuhe in einer Reihe.“ Sie zeigt auf die Länge. „... Und wieviele Reihen kann ich machen?“ Sie denkt ‘wer sagt: vier mal vier?’. Es gelingt nicht. Sie läßt Reihen von Schuhabdrucken zeichnen.

Nun sehen sie es: zwei Reihen: $4 + 4 = 8$. Nochmal zwei Reihen: $8 + 8 = 16$. So ist es: 16.

Die Lehrerin schaut herum. Viele Gesichter scheinen zu verraten, daß man es verstanden hat, aber sie ist dessen nicht sicher. Doch fährt sie nicht fort. Sie denkt, es gibt noch genug Möglichkeiten; wer es nicht verstanden hat, findet eine andere Gelegenheit.

Merkwürdige Fußspuren

Der Bäcker hat im Garten merkwürdige Fußspuren entdeckt. Er ist erschrocken. Er hat die Zeitung angerufen. Ein Berichterstatter kam. So gerieten ein Photo und eine Geschichte in die Zeitung (Abb. 7).

Ein Arbeitsbogen:

Wieviele Leute liefen durch den Garten?

Wer weiß mehr zu erzählen?

Von wem sind die Spuren?

Wer war zuerst im Garten?

Vielleicht der Riese?

Welcher Fußstapfen fehlt, ein rechter oder linker?

Wo könnte er sein?

Es bildet sich schnell die Meinung, der Riese sei im Garten gewesen. Die Fußstapfen des Journalisten sind auf dem „Photo“ noch zu sehen. Aber – so denken einige – sind auf dem Photo nicht Abdrücke aus einer Nahaufnahme (große Abdrucke) und einer Fernaufnahme (kleine Abdrucke)?

Eduard: Da sind die des Berichterstatters und da auch. Er zeigt nach links unten und rechts oben. Sind das dieselben? Man kann sich nicht einigen.

Die Lehrerin greift ein. Sie läßt Jeannette erklären, warum es nicht dieselben seien. Jeannette sagt, die des Journalisten seien kleiner.

Sehr viele Kinder verstehen es. Sie geben an, daß es vier Arten von Fußstapfen sind.

„... Von wem könnte *der* stammen?...”

Die Lehrerin zeigt einen mittelgroßen.

Zwei Antworten: ein Riesenkind ... der Bäcker.

Die Lehrerin: „Ja, es ist der Sohn des Riesen. Und wie groß wäre der wohl?“

Eine schwierige Frage, die auf die erste Stunde zurückgreift. Aber Marcel weiß es: „Ich denke, doppelt so groß wie ein Mensch. Seht mal, der Schuh.“

Ja – denken die Kinder – das ist ja wie mit der Hand. Die Lehrerin läßt nun die Fußabdrucke des Riesen rot und die seines Sohnes grün ausmalen.

„Und die anderen, was wären die wohl?“

Sie sind kaum größer als die des Berichterstatters.

„Der Bäcker entdeckte sie, als er zum Hühnerstall lief.“

Ja, das ist klar. „Male die mal gelb.“

Fußspuren des Riesen im Garten

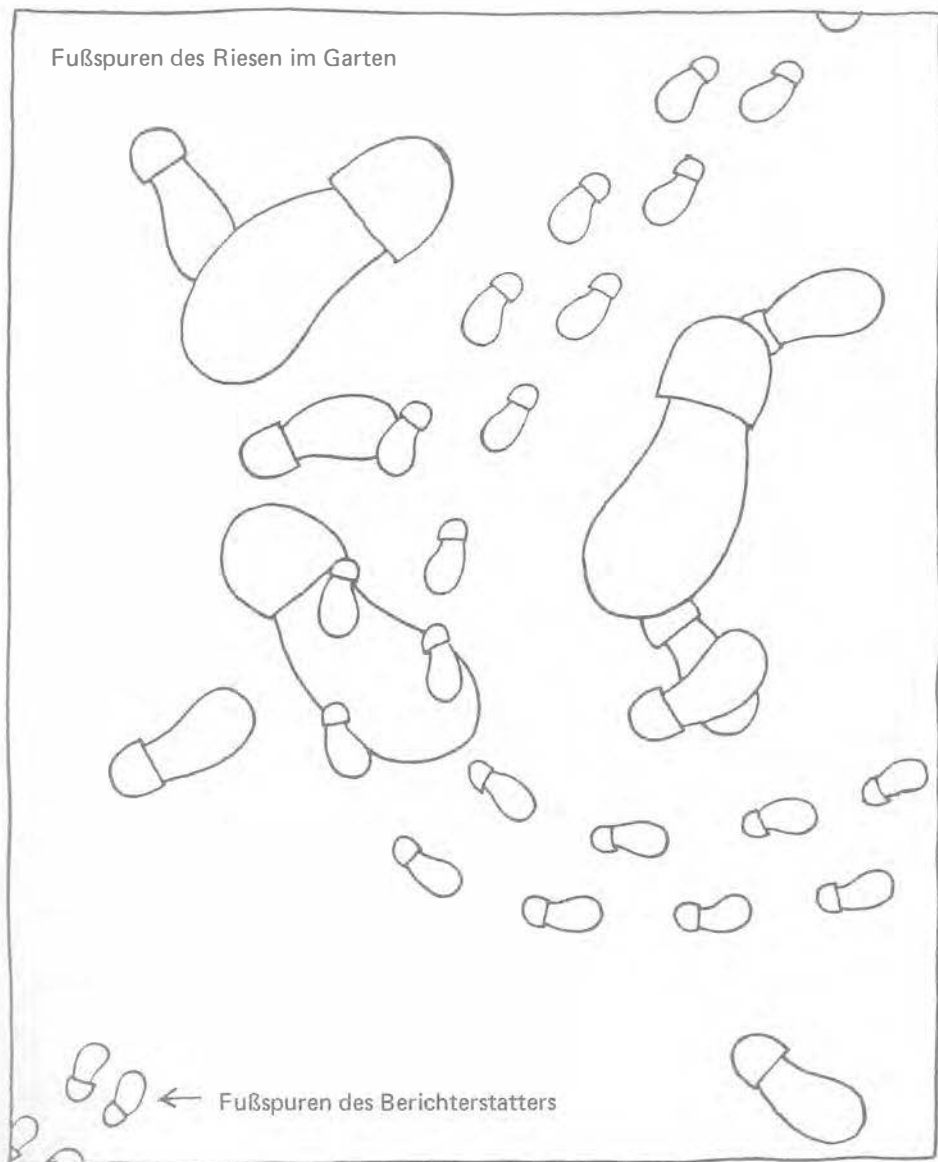


Abb. 7

Die Spuren sind identifiziert. Die Lehrerin verteilt Karten, jedem Kind vier. Die Kinder sollen die Namen darauf schreiben: Berichterstatter, Riese Egbert, sein Sohn, Bäcker.

„Wer war zuerst im Garten, wer dann, wer danach? Legt die Karten aufeinander. Unten die dessen, der zuerst da war.“

Die Kinder können aus der Geschichte und dem Photo Schlüsse ziehen.

Die Stunde wird fortgesetzt mit Diskussionen über linke und rechte Schuhe. Auf der Folie werden sie mit ‘l’ und ‘r’ angegeben.

Ein Spiel: Ein Kind verläßt das Klassenzimmer, zeichnet auf Papier seinen Fußumfang, kommt zurück und fragt: „Ist es mein rechter oder linker Fuß“?

Auf dem „Photo“ scheint ein Abdruck zu fehlen. „Wo ist er geblieben?“ Die Schrittlänge des Riesensohns ergibt es: ein rechter Fußabdruck des Sohnes fehlt.

Die Riesenzeitung

Der Riese hat gehört, daß in der Zeitung über ihn geschrieben wurde. Kann er die Zeitung wohl lesen? Er ist neugierig, aber die Zeitung ist doch viel zu klein.

„Ja, er kann lesen“ sagen die Kinder. „Er kann ja auch schreiben.“

„Wie groß müßte die Zeitung des Riesen wohl sein?“ Die Lehrerin gibt an, daß sie eine Seite meint.

„So groß“, sagt Michiel mit ausgestreckten Armen.

„Oder größer?“, fragt die Lehrerin.

„Ja, vielleicht.“

„Die Riesenzeitung muß viermal so groß wie unsere sein“, sagt Willemien.

Die Kinder finden es eine gute Idee. Sie schneiden vier Zeitungen zurecht und legen sie nebeneinander auf den Fußboden (Abb. 8).

Da stimmt etwas nicht. Sie versuchen es, indem sie zweimal zwei Seiten untereinander legen (Abb. 9).

Verwirrte Diskussionen. Es wird hoffnungslos. Die Lehrerin greift ein. „Egbert ist viermal so lang wie ich. Also ist die Zeitung ...“

„Auch vier mal so lang“, sagt Johannes.

Es hilft nicht.

Plötzlich kommt Willemien die Erleuchtung: „Wir brauchen auch vier Zeitungen so.“

Es zündet. Schnell führt man es aus. Die Überraschung ist groß. Da liegt nun eine Zeitung aus vier mal vier Menschenzeitungen (Abb. 10)

„Wieviele Menschenzeitungen brauchen wir?“

„Sechzehn“, das ist klar, obwohl eines der Kinder im Widerspruch zur anfänglichen Verabredung zeigt, wie man es mit acht auseinandergefalteten Zeitungen schafft.



Abb. 10

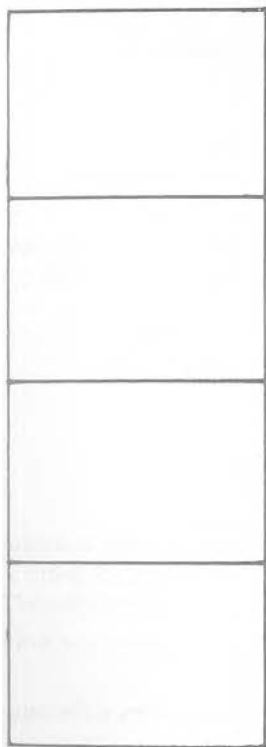


Abb. 8

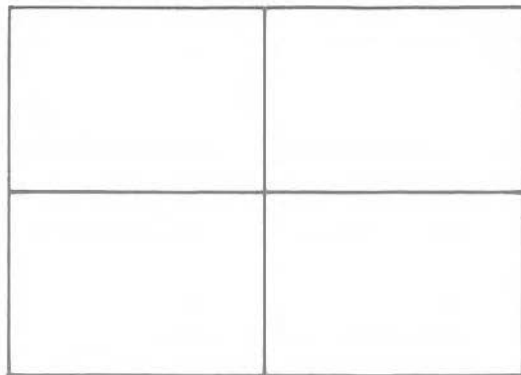


Abb. 9

Fußstapfen im Schnee

Es hat geschneit. Der Berichterstatter hat Fußspuren des Riesen im Schnee entdeckt. Fußstapfen des Bäckers und des Riesen hinter dem Hause des Bäckers. Wieder ein Photo in der Zeitung – als Arbeitsbogen (Abb. 11).

Die Lehrerin verteilt die Arbeitsblätter:

„Wie viele Schritte brauchte der Riese vom Baum zum Hause des Bäckers? Wieviele brauchte der Bäcker?“

Auf dem Photo sind es drei bzw. fünfzehn. Die Lehrerin erzählt: „Der Bäcker war auf dem Wege von seinem Haus zu dem des Riesen, um einen Kuchen zu bringen. Der Riese brauchte 18 Schritte von seinem Hause zu dem des Bäckers.“

Sie fragt: „Wieviele Schritte brauchte der Bäcker von seinem Hause zu dem des Riesen?“

Zwei Hilfsmittel werden zur Lösung dieser schwierigen Aufgabe gebraucht. Erstens eine Tabelle an der Tafel:

Egbert	3	6	9	12	15	18
Bäcker	15

Zweitens die Zahlengerade mit zwei Skalen:

Riese	3	6	9	12	15
Bäcker	15

Der Bäcker braucht immer 15 Schritte, wo der Riese es mit drei schafft. Die Anzahl der Schritte des Bäckers wird so aus der des Riesen aufgebaut. Ähnlich geschieht es mit denen des Riesensohnes:

Riese	3	6	9	12	15
Sohn	6

Die Verhältnisse werden wieder dem „Photo“ entnommen.

Nach dieser Rechnerei findet die Lehrerin, daß Abstände und Schritte noch andersartig behandelt werden können. Sie sagt: „Der Bäcker brauchte 15 Schritte von seinem Haus zum Baum. Sieh mal! Wie weit ist der Baum wohl vom Hause?“

Natürlich raten die Kinder erst, aber wenn die Lehrerin fragt: „Könnten es wohl hundert Meter sein?“, fangen sie an zu zweifeln.

Annemieke sagt überzeugt: „Der Bäcker schafft in 15 Schritten sicher nicht hundert Meter.“

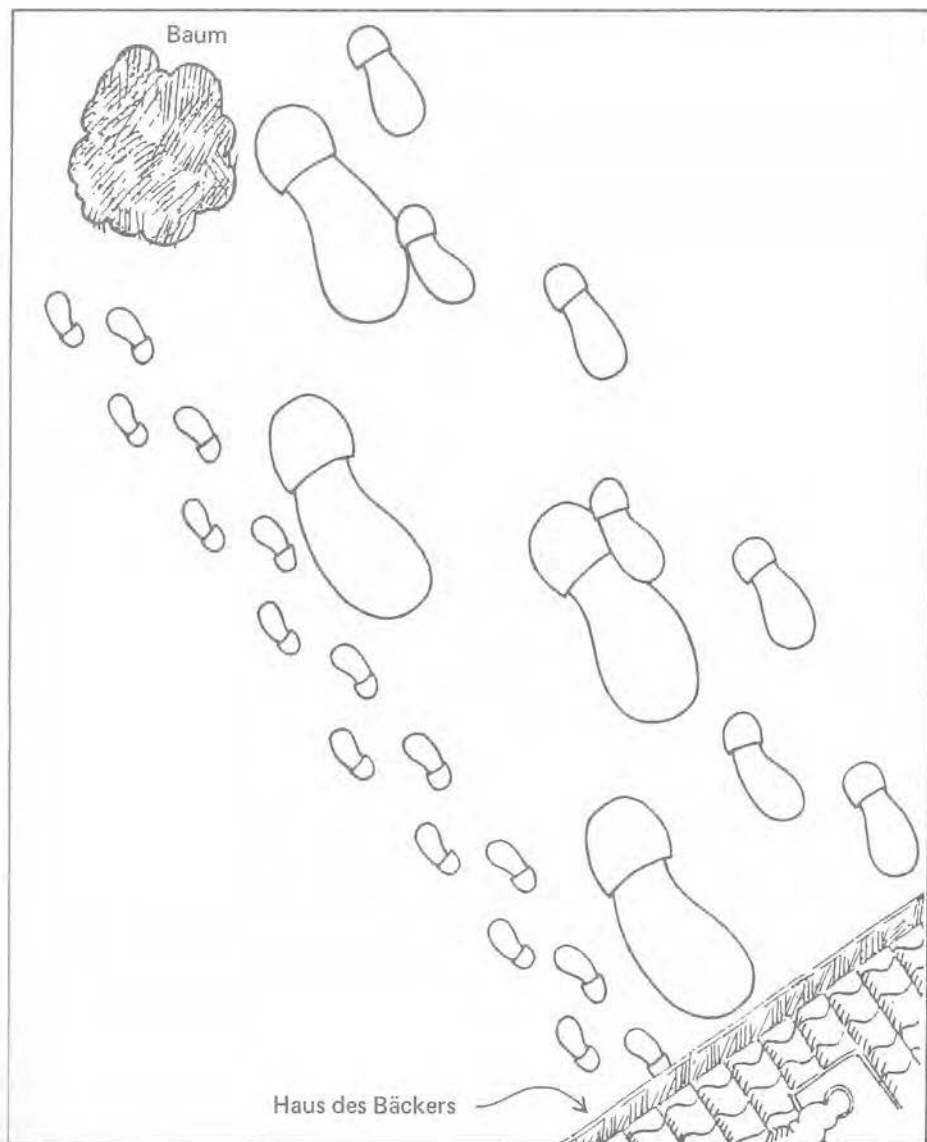


Abb. 11

„Wieviel dann?“

„Messen, Fräulein.“

Die Lehrerin schreitet. „Ich mache fünf Schritte. Wieviel ist das?“

Die Kinder messen mit dem Tafellineal. Es sind ungefähr 2.60 m. Aber da der Bäcker größer ist als die Lehrerin, werden seine Schritte wohl länger sein. Man verabredet, daß fünf Schritte des Bäckers drei Meter sind. Wieder eine Tabelle an der Tafel:

Schritte	5	10	15
Meter	3

Es endet natürlich mit der Frage nach dem Abstand zwischen den Häusern des Bäckers und des Riesen.

Dem Riesen frieren die Hände

Es ist Winter, es liegt Schnee. Der Riese Egbert friert. Er sollte eigentlich Fausthandschuhe für seine kalten Hände haben müssen.

Wie groß wären die wohl?

Die Lehrerin ist neugierig, ob die Lösung den Kindern gelingt. Bei Schuh und Zeitung ist dasselbe Problem schon gestellt worden. Die Zahl 4 schwebt auf der Zunge, aber inzwischen haben sie auch etwas gelernt.

Die Lehrerin zeichnet eine Hand auf die Tafel. (Abb. 12) Einige Finger erheben sich. Simona: „Vier neben und vier untereinander.“

Es macht doch Schwierigkeiten. Schließlich steht eine Zeichnung an der Tafel (Abb. 13).

Vier Reihen von vier gibt 16. Die Lehrerin fährt fort. „Meine Mutter strickte einen Fausthandschuh für mich. Es dauerte eine Stunde. Wie lange wird es dauern, wenn sie für den Riesen strickt?“ Sie zeigt auf einen Handschuh und sagt „eine Stunde“.

Die Kinder protestieren. 16 Stunden – das geht nicht; dann ist es mitten in der Nacht.

Die Lehrerin geht darauf ein. „Meine Mutter strickt vier Stunden pro Tag. Wieviele Tage sind das?“

Wieder wird die Zahlengerade und die Tabelle herangezogen.

Tage	1	2
Stunden	4	8		16	32



Abb. 12

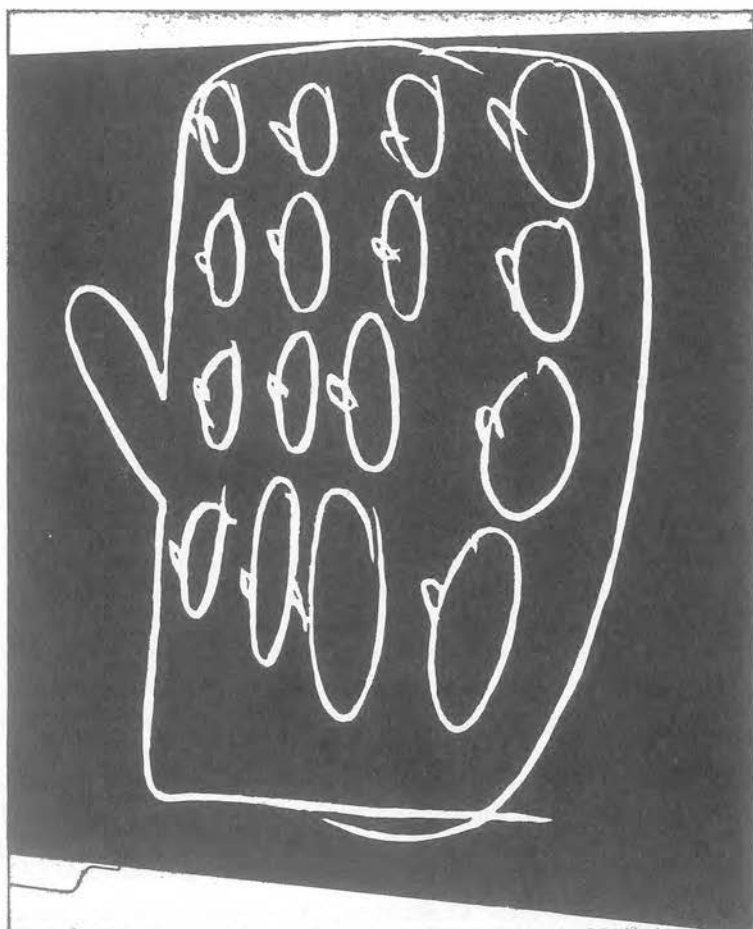


Abb. 13

Die Lehrerin fährt fort: „Zu einem Paar Fausthandschuhe für mich braucht meine Mutter einen Knäuel Wolle.“ Sie schreibt an die Tafel:

Knäuel	1	2
Fausthandschuhe	2	16	32

„Wieviele meiner Fausthandschuhe passen in den des Riesen? Und zwei Riesenhandschuhe? Rechnet nun aus, wieviel Knäuel Wolle sie braucht!“

Dieses Thema läßt sich beliebig variieren. Zwei Knäuel Wolle für 10 Mark; wieviel kosten die 16 für die Riesenhandschuhe?

Mit Verdopplung:

Knäuel	2	4	6	10	16	...
Mark	10	20	30	50	80	...

oder mit Addition

Knäuel	2	4	...	8	...
Mark	10	20	...	40	...

oder mit der Fünferfolge

Knäuel	2	1	3	..	6	10	...
Mark	10	5	15	...	30	50	...

Addieren und Subtrahieren mit dem Abakus

In der ersten Phase unserer Unterrichtsversuche wurde der Abakus¹⁾ verwendet, um das Zählen und das Einwechseln konkret zu begleiten; kleine Additionen und Subtraktionen wurden ausgeführt. In der zweiten Phase bleibt das ein mehr spielerischer Unterstrom, während der Oberstrom stärker geführt wird.

1) Verfasser Wiskobas-Team, Kleinkindschule. Man benutzte den Bügelabakus mit 20 Perlen pro Bügel. Bezugsquelle in der Bundesrepublik Deutschland: Fa. Busyma, Postfach 1260, 7060 Schorndorf – „Große Rechenmaschine“ Nr. 6892

1. Einleitung

Die gewählte Methode läßt sich als geführte progressive Schematisierung charakterisieren. Eine Rechenweise wird hier als Resultat eines langen Prozesses betrachtet, wie er sich in der Geschichte unter Teilnahme vieler Kulturen vollzogen hat. Vom Schüler wird er beschleunigt wiederholt.

Grob gesagt: Das Steinchenlegen wird durch das Perlenschieben am Abakus ersetzt, und das wieder durch immer mehr schematisiertes Notieren auf dem Papier.

Die Schüler entwickeln im Prinzip selbständig in ihrem eigenen Tempo und auf ihrem eigenen Niveau Rechenweisen, die immer stärker schematisiert werden. Die Differenzierung ist also eingebaut. Man kann von Niveaus der Verkürzung reden; ein folgendes bedeutet eine kürzere, also schnellere Methode. Es läßt sich beim progressiven Schematisieren sowohl spontane wie geführte Tätigkeit feststellen. Führt der Lehrer, so kontrolliert er die Tätigkeiten besser. Läßt er den Schüler spontan handeln, so vollziehen sich freie Niveauerhöhungen.

Bei Gruppen von etwa 30 Schülern stößt man ohne Führung auf Schwierigkeiten. Nach drei bis vier Monaten können die Schüler schriftlich addieren und subtrahieren. Wohl gibt es da Tempo- und Niveau-Unterschiede, aber alle können es, wenn auch dieser noch den Abakus und jener noch Stellenwertkarten als Hilfsmittel braucht.

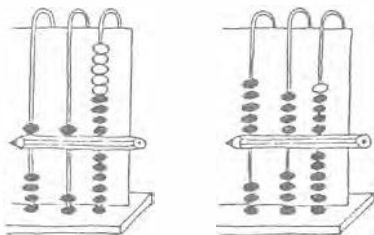
Da der Abakus nur dann gut funktioniert, wenn die Aufgabe sich nicht anderweitig (aus dem Kopf, auf der Zahlengeraden) lösen läßt, wird in der zweiten Phase fast nur mit Zahlen zwischen 100 und 1000 gearbeitet. Das Folgende gibt Erfahrungen in Schulen in Arnheim und Hilversum wieder.

2. Addieren

2.1. Nach den Sommerferien kommen die Schüler ins 3. Schuljahr. Vorläufig wird nur das schriftliche Addieren unterrichtet. Mit dem schriftlichen Abziehen wartet man noch, um die Schüler beim Einwechseln nicht zu verwirren. Insbesondere die schwächeren müssen davor behütet werden. Andersartiges Abziehen findet natürlich wohl statt.

Die Aufgaben werden angeschrieben. Etwa

$$\begin{array}{r} 426 \\ 119 + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 346 \\ 545 + \\ \hline \end{array}$$

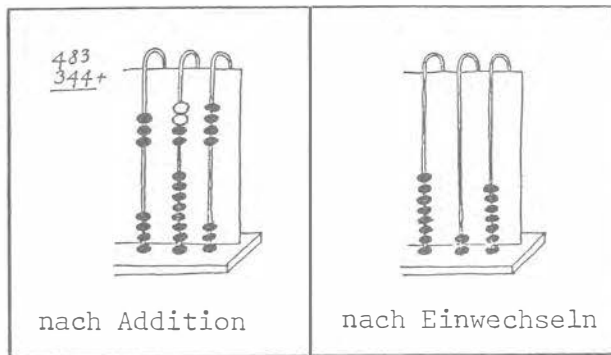


Noch zwei allgemeine Bemerkungen:

2.2. Die Schüler müssen von Anfang an regelmäßig Übungsspiele (etwa 10 Minuten) zur Automatisierung der Additionen und Subtraktionen bis 20 treiben. Diese Spiele sind nötig, um schnell am Abakus und auf der Stellenwertkarte zu rechnen. In diesen 10 Minuten wird auch das Einmaleins geübt. Die einzelnen Perioden des Rechnens mit Abakus und Stellenwertkarte sollen kurz sein (etwa 20 Minuten). Es werden sonst zuviele Flüchtigkeitsfehler gemacht.

2.3. Beim Lernen der schriftlichen Addition können wir grob acht Schritte unterscheiden:

Schritt 1



Die Schüler rechnen alles am Abakus und schreiben das Ergebnis hinterdrein auf.

Schritt 2

Saskia sagt

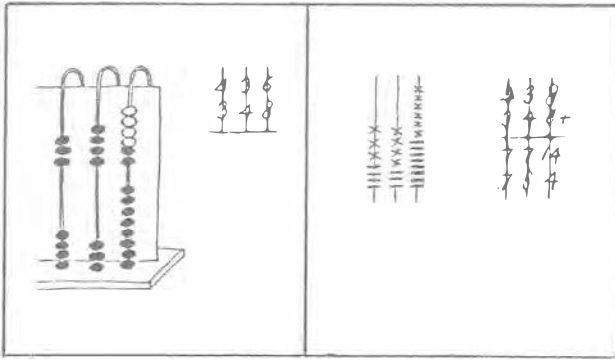
- erst habe ich 438 gemacht,
- dann 256 hinzu
- 14 Perlen waren auf dem ersten Bügel,
- 10 habe ich für einen Zehner eingetauscht
- fertig: 694

$$\begin{array}{r} 438 \\ + 256 \\ \hline \end{array}$$

Wieder am Abakus rechnen und das Ergebnis aufschreiben. Das Verbalisieren ist nun wichtig. Wenn von Schritt 6 an nur mit der Stellenwertkarte gearbeitet wird, unterstützt das Verbalisieren die Vorstellung der Handlung am Abakus.

Die ersten zwei Schritte dauern etwa drei Wochen (2 bis 3 mal 20 Minuten pro Woche).

Schritt 3



h	z	e
+	3	8
3	4	6
+		
7	7	4
7	8	4

Am Abakus ausrechnen. Verbalisieren. Anschreiben mit Stellenwertlinien. Es braucht eine Stunde. Die Schüler sollen vom Abakus aus zur nebenstehenden Schreibweise kommen.

Schritt 4

Lehrer(in) und Schüler führen dieselben Handlungen aus. Jeder rechnet eine Aufgabe am Abakus. Die Schüler verbalisieren. Der Lehrer schreibt es an; wenn nötig, verlangt er eine klarere Formulierung. Die Schüler schreiben es mit allen Zwischenschritten von der Tafel ab.

Schritt 5

Es wird am Abakus gerechnet. Die Schüler schreiben alle Schritte selber auf, ohne Lehrerhilfe. Hinterdrein wird die Schülerarbeit vor der Tafel kontrolliert.

Die Schritte 4 bis 5 geschehen in ein bis zwei Perioden. Von nun an machen die Schüler täglich 5 Additionen (20 Minuten). Der Lehrer hilft mit Fehleranalyse.

Schritt 6

7	2	5
1	9	4
+		
8	11	9
9	1	9

Die Schüler notieren selber gleich auf der Stellenwertkarte ohne Abakus. Er ist wohl noch verfügbar, wird aber nicht verwendet.

Schritt 7

$$426 + 119 =$$

4	2	6
1	1	9
5	3	5
5	4	5

Die Aufgabe wird waagrecht aufgeschrieben.

Schritt 8

$$23464 + 5674 =$$

2	3	4	6	4
	5	6	7	4
2	8	10	13	8
2	9	1	3	8

Größere Zahlen motivieren stark.

2.4. Nach sechs Wochen ist die Addition erledigt. Die Schüler machen etwa 20 Aufgaben in einer halben Stunde. Fehler sind selten. Verkürzungen kommen allmählich zustande.

4	3	8
3	9	7
7	12	15
7	13	5
8	3	5

①

4	3	8
3	9	7
7	12	15
8	3	5

②

oder

4	3	8
3	9	7
7	13	5
8	3	5

③

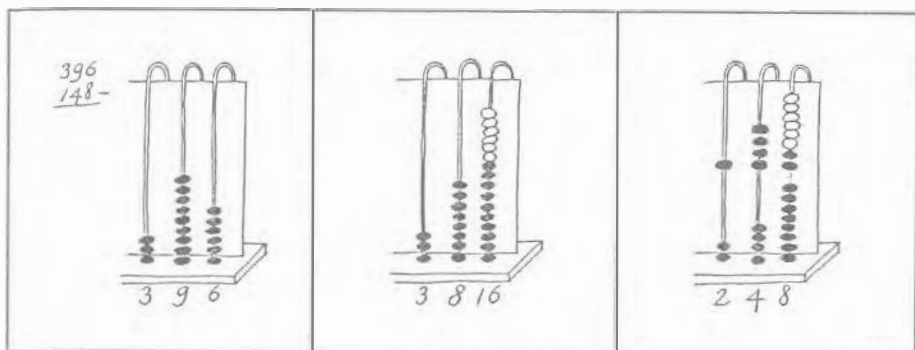
Kommen dann Fehler vor, so fordere man, daß alle Schritte am Abakus ausgeführt werden.

Nach den ersten 6-7 Wochen fahren die Schüler fort mit großen Zahlen (je 5 bis 10 Aufgaben, 1-2 mal pro Woche).

3. Subtrahieren

Es ist den Schülern von früher bekannt, wie man Zahlen am Abakus verschiedenartig darstellt.

Schritt 1



Ausrechnen am Abakus. Nur einmal Einwechseln. Keine Nullen. Rechts anfangen, bei den Einern.

Schritt 2

Am Abakus ausrechnen. Antwort aufschreiben. Die Handlung verbalisieren.

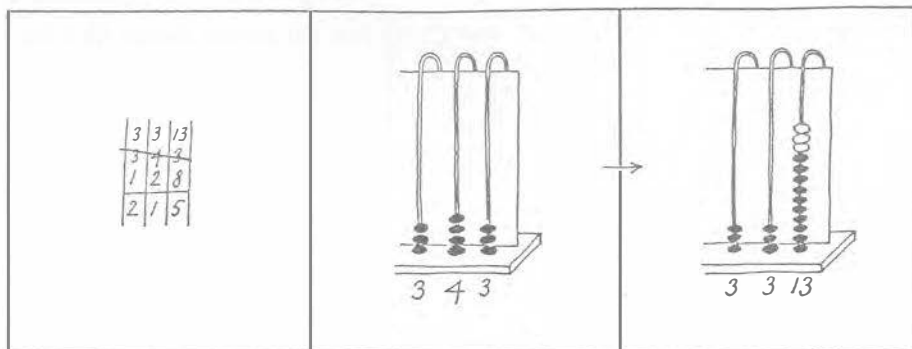
Schritt 3

Nach zwei Wochen, die Schreibweise wird eingeführt. Da müssen Verabredungen getroffen werden. Verschiedene Möglichkeiten:

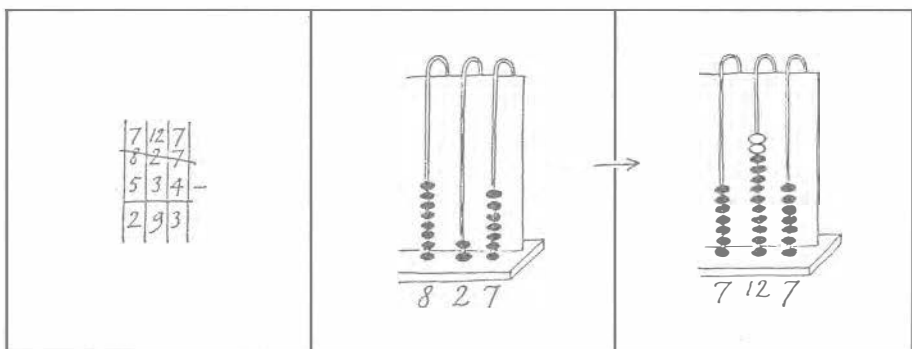
a)
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 9 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} - \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 8 & 16 \\ \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 4 & 8 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 9 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline 3 & 8 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} -$$

c)
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 8 & 16 \\ \hline 3 & 9 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} -$$

Schritt 4

Mit dem Abakus vor der Tafel ausrechnen. Dort wird angeschrieben. Die Schüler schreiben mit.

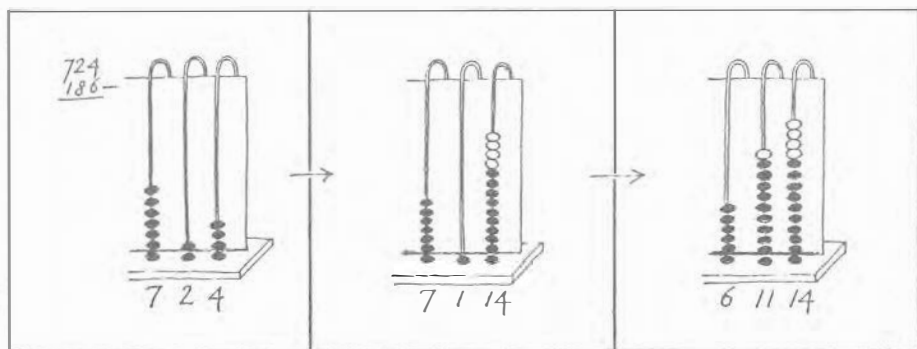
Schritt 5

Die Schüler rechnen am Abakus und schreiben es hinterdrein auf die Stellenwertkarte. Der Lehrer greift nachher zur Kontrolle und Verbalisierung ein.

Schritt 6

Vier Wochen nach Beginn. Die Schüler machen 5 Aufgaben pro Tag in 20 Minuten. Individuelle Lehrerhilfe durch Fehleranalyse.

Schritt 7



Aufgaben, in denen zweimal eingewechselt wird. Zunächst wird nur am Abakus gerechnet.

Schritt 8

hiversam:

6	11	4
7	1	4
7	2	4
1	8	6
5	3	8

arnhem:

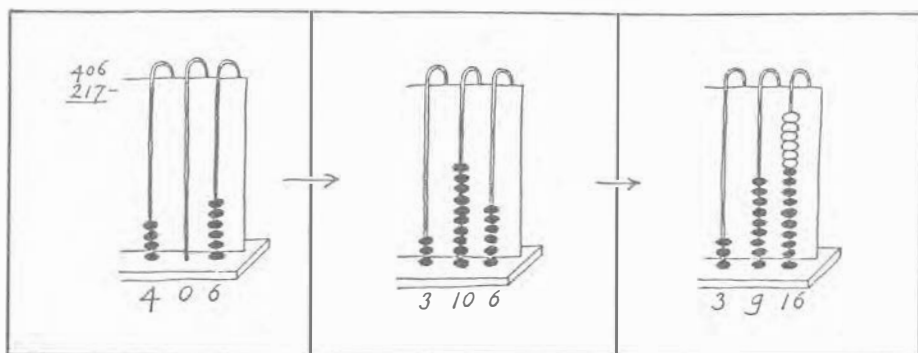
6	11	-
7	1	14
7	2	4
1	8	6
1	8	8

Schritte 3, 4, 5 wiederholt, nun aber mit zweimal Eintauschen.

Schritt 9

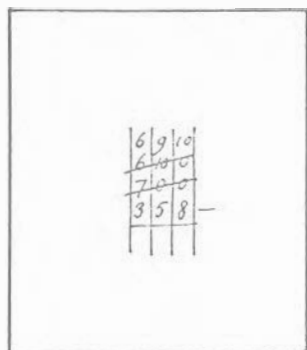
Sechs Wochen nach Beginn: Aufgaben mit ein und zwei Einwechselungen durch-einander. Jedesmal 5 Aufgaben. Addieren und Subtrahieren an verschiedenen Tagen.

Schritt 10



Eine neue Kategorie: Nullen im Minuenden. Am Abakus arbeiten und verbalisieren.

Schritt 11



Schritte 3, 4, 5 werden mit mehreren Nullen im Minuenden wiederholt.

Schritt 12

Alle Typen durcheinander. Immer Perioden von 20 Minuten.